Equation de propagation sur la position :

On étudie la propagation sur une corde unidimensionnelle de masse linéique μ

un pdf nous donne : $\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u_y} = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) \implies \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u_y} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x}$

On note α l'angle que fait la corde avec sa position au repos

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial x}(Tcos(\alpha)) \\ \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(Tsin(\alpha)) \end{cases}$$

avec un dl à l'odre 1:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial}{\partial x}(T) \\ \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(T\alpha) \end{cases}$$

La première équation nous permet de conclure que T ne dépend pas de x donc :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

en notant que le dl de α à l'odre 1 : $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \implies \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$\boxed{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ en } s.m^{-1}}$ et $\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \text{ l'équation d'onde de d'Alembert}}$

Les solutions de l'équation d'onde de d'Alembert :

$F(x-ct), G(x+ct), f(t-\frac{x}{c})$ ou $g(t+\frac{x}{c}),\ C^2$

ou toutes combinaision linéaire de ces fonctions...

Onde unidimensionnelle, progressive et harmonique :

$$\boxed{y(x,t) = y_0 cos(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

cette onde est solution de l'équation de d'Alembert si et seulement si $c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2$

il est important de noter que :

Toute onde se décompose en une somme de Fourier, éventuellement continue, d'ondes progressives harmoniques

Solution stationnaire de l'équation d'Alembert :

la corde étant attaché à un bout et vérifiant l'équation d'Alembert :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \text{ (EA)} \\ \forall t,\ y(0,t) = 0 \text{ (CL)} \end{cases}$$

en notaton complexe l'onde peut s'écrire :

$$\underline{y}(x,t) = \underline{y_0^+}exp(j\omega_i t + jk_i x) + \underline{y_0^-}exp(j\omega_r t - jk_r x) \begin{cases} \underline{y_0^+}exp(j\omega_i t + jk_i x) \text{ pour l'onde incidente} \\ \underline{y_0^-}exp(j\omega_r t - jk_r x) \text{ pour l'onde réfléchis} \end{cases}$$

$$\text{(EA)} : c = \frac{\omega_i}{k_i} = \frac{\omega_r}{k_r}$$

$$\text{(CL)} : \forall t\ \underline{y_0^+}exp(j\omega_i t) + \underline{y_0^-}exp(j\omega_r t) = 0 \begin{cases} \underline{y_0^+} + \underline{y_0^-} = 0\ (t=0) \\ \omega_i = \omega_r \end{cases}$$

$$\underline{y}(x,t) = \underline{y_0}exp(j\omega t)(exp(jkx) - exp(-jkx))$$

$$y(x,t) = -Y_0 sin(\omega t + \varphi)sin(kx)$$

$$\boxed{\text{deux noeuds sont espacé de } \frac{\lambda}{2}}$$