○ Quelques définitions:

Densité de flux thermique: $\vec{j_{th}}$ en $W \cdot m^{-2}$

Puissance thermique: $P_{th} = \Phi_{th} = \iint_S \vec{j_{th}} \cdot d\vec{S}$ en W

Loi de fourier: $\vec{j_{th}}(M,t) = -\lambda \vec{\nabla} T(M,t)$

○ Loi de diffusion thermique:

En 1 D: D'une part: $\delta^2 Q = \iint\limits_{\text{Gauche}} \vec{j_{th}}(x,t) \cdot dS \cdot \vec{e_x} \cdot dt + \iint\limits_{\text{Droite}} \vec{j_{th}}(x+Dx,t) \cdot dS \cdot (-\vec{e_x}) \cdot dt$

$$= -\frac{\partial \vec{j_{th}}}{\partial x}(x,t) \cdot S \cdot dx \cdot dt$$

D'autre part: $d(\delta U) = \rho \cdot c_{vm} \cdot \dfrac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \cdot S \cdot dx$

et comme (Premier Principe): $\delta^2 Q = d(\delta U) \implies -\dfrac{\partial \vec{j_{th}}}{\partial x}(x,t) = \rho \cdot c_{vm} \cdot \dfrac{\partial T}{\partial t}$

En utilisant la loi de fourier: $\dfrac{\lambda}{\rho c_{vm}} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial T}{\partial t}(x,t)$

Avec une source volumique en 1D: $\dfrac{\partial P}{d\tau}(x,t) = p(x,t)$

$$\delta^2 Q = \iint\limits_{\text{Gauche}} \vec{j_{th}}(x,t) \cdot dS \cdot \vec{e_x} \cdot dt + \iint\limits_{\text{Droite}} \vec{j_{th}}(x+Dx,t) \cdot dS \cdot (-\vec{e_x}) \cdot dt \ + \ p(x,t) \ \cdot S \ \cdot dx \ \cdot \ dt$$

$$= -\frac{\partial \vec{j_{th}}}{\partial x}(x,t) \cdot S \cdot dx \cdot dt + \ p(x,t) \ \cdot S \ \cdot dx \ \cdot \ dt$$

$$= \rho \cdot c_{vm} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \cdot S \cdot dx \text{ (d'après les calculs précèdent)}$$

Avec la loi de Fourier on en déduit: $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) + \dfrac{p(x,t)}{\lambda} = \dfrac{\rho c_{vm}}{\lambda} \dfrac{\partial T}{\partial t}(x,t)$

○ Forme intégral du bilan de puissance:

$$P_{itn} - \Phi_{int} = \frac{dU}{dt}$$

On peut passer au forme intégral et en utilisant Ostrogradski:

$$\iiint_\Omega (p_{int} - div\vec{j_{th}} - \frac{\partial(\rho u)}{\partial t})d\tau = 0$$

On retombe sur: $\Delta T(x,t) + \dfrac{p(x,t)}{\lambda} = \dfrac{\rho c_{vm}}{\lambda} \dfrac{\partial T}{\partial t}(x,t)$