Récap des principaux théorèmes d'Analyse de SUP

Axel Carrignon - PSI*

Contents

1 Limite et continuité

Définition et caractérisation séquentielle de la limite

Caractérisation par les ϵ de la limite :
Soit $f \in \mathbb{R}^I$ définie au voisinnage de $a \in \bar{I}$ et un réel l.

- Si a est fini on dit que f admet l pour limite au point a si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

- Si $a = +\infty$ on dit que f admet l pour limite en $+\infty$ si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists A > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

Caractérisation séquentielle
Soit $a \in \bar{I}$ et $l \in \bar{\mathbb{R}}$. On a :

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = l\right) \iff \left(\forall u \in I^{\mathbb{N}}, u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \ \Rightarrow \ f(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l\right)$$

Théorème de la bijection continue

Si $f \in C(I, \mathbb{R})$ est strictement monotone sur I, alors elle est bijective de I sur $J = f(I)$ et sa bijection réciproque est continue sur J, strictement monotone et de même sens de variation que f.

Prolongement par continuité

Soit $b \in \bar{I} \setminus I$ fini. Si f admet une limite finie en b, on dit que f se prolonge par continuité en b.
Dans ce cas, on appelle prolongement par continuité de f la fonction $\tilde{f}$ définie par :

$$\tilde{f} : I \cup \{b\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \ell & \text{si } x = b \end{cases}$$

où

$$\lim_{x \to b} f(x) = l$$

Théorème des valeurs intermédiaires

Si $f \in C(I, \mathbb{R})$, alors $f(I)$ est un intervalle. Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Corollaire:
Si $f \in C(I, \mathbb{R})$ et $[a, b] \subset I$, tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent dans $[a, b]$ par f.

2 Dérivation

Formule de Leibniz

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si f et g sont deux fonctions de classe C^n sur I, un intervalle de $\mathbb{R}$, alors fg est de classe C^n sur I et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Théoreme de Rolle

Soit f une fonction continue sur [a,b], dérivable sur]a,b[et telle que $f(a) = f(b)$.
Il existe c∈]a, b[tel que f'(c) = 0.

Théoreme des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[, il existe c∈]a, b[tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[, et telle que $m \leq f' \leq M$. Alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Fonction convexe

Soit f $\in \mathbb{R}^I$.On dit que f est convxe sur I si pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Si -f est convexe, on dit que f est concave.

3 Primitives

Définition - Primitives

Soit $f \in C(I, \mathbb{K})$. On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et F' = f

Primitives - 1

Soient $f \in C(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.

- La fonction f admet des primitives sur I. On note $x \mapsto \displaystyle\int^x f(t)dt$ une primitive quelconque de f.
- La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, définie sur I, est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Primitives - 2

Soient $f \in C(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.

- Pour toute primitive F de f sur I, on a $\forall x \in I$, $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$.
- Si f est de classe C^1 sur I, alors $\forall x \in I$, on a $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$.

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur I. Alors, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

4 Suites

Suites adjacentes

Définition :
Deux suites u et v sont **adjacentes** si elles sont monotones de sens contraires et $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Lemme :
Si u et v sont deux suites adjacentes avec u croissante et v décroissante, alors pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_p$.

Théorème :
Si u et v sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Tout réel x est limite d'une suite de rationnels. Autrement dit, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Suite récurrente d'ordre 1 (à systématiquement reprouver)

Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est croissante sur I alors u est monotone.

- si $u_0 \leq u_1$ alors u est croissante
- si $u_0 \geq u_1$ alors u est décroissante

Théorème du point fixe

Propriété :
Soit une fonction f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$ et $|f'| \leq k < 1$.
Si u est une suite définie par $u_0 \in [a,b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, alors :

- f admet un unique point fixe $\ell \in [a,b]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$.
- La suite u converge vers ℓ.

5 Analyse asymptotique

5.1 suites

Comparaisons des suites de référence

Soient trois réels non nuls α, β et $a > 0$:

- Si $0 < a < 1$, alors $a^n = o(n^\alpha)$ et si $a > 1$, alors $n^\alpha = o(a^n)$.
- Si $\alpha < 0$, alors $n^\alpha = o((ln(n)^\beta)$ et si $\alpha > 0$, alors $(ln\ n)^\beta = o(n^\alpha)$
- $a^n = o(n!)$

Corollaires :

- Si $0 < a < 1$, alors $a^n = o(ln(n)^\beta)$ et si $\alpha > 1$, alors $ln(n)^\beta = o(n^\alpha)$
- $n^\alpha = o(n!)$ et $(ln\ n)^\beta = o(n!)$.

5.2 fonctions numériques

Comparaison des fonctions usuelles

Soient trois réels non nuls α, β et $a > 0$:

- Si $0 < a < 1$ alors $a^x = \underset{+\infty}{o}(x^\alpha)$ et si $a > 1$, alors $x^\alpha = \underset{+\infty}{o}(a^x)$
- si $\alpha < 0$ alors, $x^\alpha = \underset{+\infty}{o}((ln\ x)^\beta)$ et si $\alpha > 0$ alors $(ln\ x)^\beta = \underset{+\infty}{o}(x^\alpha)$
- $0 < a < 1$, alors $a^x = \underset{+\infty}{o}((ln\ x)^\beta)$ et si $a > 1$, alors $(ln\ x)^\beta = \underset{+\infty}{o}(a^x)$
- Si $\alpha < \beta$, $x^\alpha = \underset{+\infty}{o}(x^\beta)$

Corollaires : Soient deux réels non nuls α et β.

- Si $\alpha < \beta$, $|x|^\beta = \underset{0}{o}(|x|^\alpha)$.
- Si $\alpha > 0$ alors $x^\alpha = \underset{0^+}{o}(|\ln x|^\beta)$ et si $\alpha < 0$, alors $|\ln x|^\beta = \underset{0^+}{o}(x^\alpha)$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre n

Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^n sur I et $a \in I$. On a :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n).$$

Corollaires :

- Toute fonction de classe C^n sur I admet un DL d'ordre n au voisinage de tout $a \in I$.
- Si f est de classe C^n sur I, alors f' est de classe C^{n-1} sur I et admet un DL d'ordre $n-1$ au voisinage de tout $a \in I$, obtenu en dérivant terme à terme le DL d'ordre n de f en a.

Tous les développements limités suivants sont au voisinage de 0.

Développements de base (obtenus par la formule de Taylor-Young) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \qquad \textbf{(1)}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \qquad \textbf{(2)}$$

Développements obtenus à partir de **(1)** :

$$e^{\lambda x} = 1 + \lambda x + \frac{\lambda^2 x^2}{2!} + \frac{\lambda^3 x^3}{3!} + \cdots + \frac{\lambda^n x^n}{n!} + o(x^n) \qquad (x \leftrightarrow \lambda x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \text{(formule de ch)}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{(formule de sh)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \text{(formule d'Euler)}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \text{(formule d'Euler)}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \qquad \text{(quotient)}$$

Développements obtenus à partir de **(2)** :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = -1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = -1 \text{ et } x \leftrightarrow -x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad \left(\text{intégration de } \frac{1}{1+x}\right)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \qquad \left(\text{intégration de } \frac{1}{1-x}\right)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-3)}{2\times 4\times\ldots\times(2n)}x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = ½)$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \cdots - \frac{1\times 3\times\ldots\times(2n-3)}{2\times 4\times\ldots\times(2n)}x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = ½ \text{ et } x \leftrightarrow -x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = -½)$$

Figure 1: Développements limités usuels

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \cdots + \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}x^n + o(x^n) \qquad (\alpha = -½ \text{ et } x \leftrightarrow -x)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad (\text{intégration de } \frac{1}{1+x^2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}\frac{x^{2n}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad (\text{intégration de } \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \cdots - \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}\frac{x^{2n}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \qquad (\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x)$$

Figure 2: Développements limités usuels

6 Intégration sur un segment

Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction continue sur [a, b].

- Si m est un minorant et M un majorant de f sur [a, b], alors $m < \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f < M$.
- Si g est une fonction continue sur [a, b], alors $\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \underset{[a,b]}{sup}|f| \int_{[a,b]} |g|$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient f et g deux fonctions continues sur [a, b]. On a :

$$\left(\int_{[a,b]} f \times g\right)^2 \leq \left(\int_{[a,b]} f^2\right) \times \left(\int_{[a,b]} g^2\right)$$

Et il y a égalité ssi si les fonction f et g sont proportionnelles i.e. $\exists k \in \mathbb{R}$, tel que f = kg ou g = kf.

6.1 Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral

Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^{n+1} sur I et $a \in I$. On a $\forall x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n

soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^{n+1} sur I. S'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $|f^{(n+1)}| \leq M$ sur I, alors pour tous $a, b \in I$:

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leq M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Sommes de Riemann

si f est une fonction continue sur [a, b], on a :

$$\underset{n\to+\infty}{lim} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \underset{n\to+\infty}{lim} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f$$

De plus, si f est λ-lipschizienne sur [a, b], on a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\int_{[a,b]} f - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq \lambda\frac{(b-a)^2}{n}.$$

7 Séries numériques

Comparaison Série-Intégrale - Méthode

Soit $\sum u_n$ une série telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$ où f est une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \leq u_0 + \int_0^n f(t)dt$$

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

S'adapte pour f croissante.

Série absolument convergente

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. On a alors $\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$

8 Fonctions de deux variables

Règle de la chaîne

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U.

- Si $\varphi : I \to U ; t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ est de classe C^1 sur I,un intervalle de $\mathbb{R}$), alors $f\circ\varphi$ est de classe C^1 sur I et pour tout $t \in I$:

$$(f\circ\varphi)'(t) = \varphi_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) + \varphi_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) = \nabla f\left(\varphi(t)\right)\cdot\left(\varphi'(t)\right)$$

- Si $\varphi : (u, v) \mapsto (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$ est une application de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans U, alors $F = f\circ\varphi$ est de classe C^1 sur V avec :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))$$